Matematika A1 – „písemné" cvičení 3. – 1. část

3. Vlastnosti funkce:

a) Opakování definic:

(i) funkce f je lichá, když platí:

$$(x \in Df \Rightarrow -x \in Df) \wedge (f(-x) = -f(x))$$

f je sudá, když platí:

$$(x \in Df \Rightarrow -x \in Df) \wedge (f(-x) = f(x))$$

Příklad: funkce $f(x) = x^3$ je lichá, stejně tak i $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sin x$

funkce $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $f(x) = \cos x$ jsou funkce sudé, i $f(x) = |x|$;

(ii) funkce f je rostoucí (klesající, nerostoucí, neklesající) na množině $M \subset R$, když platí pro všechna $x_1, x_2 \in M$:

$$x_1, x_2 \in M,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

(resp. $f(x_1) > f(x_2)$; resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$, resp. $f(x_1) \leq f(x_2)$)

(iii) f je prostá na $M \subset R$, když platí pro všechna $x_1, x_2 \in M$:

$$x_1, x_2 \in M,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Příklad: $f(x) = x^3$ je prostá funkce v R;
$f(x) = x^2$ je funkce prostá v $\langle 0, \infty)$, nebo v $(-\infty, 0\rangle$
$f(x) = e^x$ je funkce prostá v R, $f(x) = \ln x$ je prostá v $(0, +\infty)$

(iv) <u>funkce inverzní</u> k funkci f na množině M:

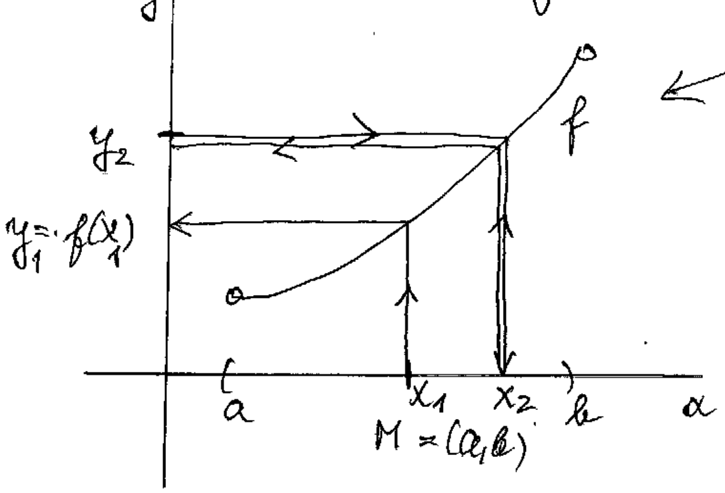
je-li funkce f prostá na množině M, pak ekvivalentně k definici (iii) lze napsat:

- pro každé $y \in f(M)$ (množiny obrazů bodů z M) existuje jediné $x \in M$ takové, že $f(x) = y$;

lze tedy „přiřadit" každému $y \in f(M)$ jediné $x \in M$ – – toto „přiřazení" (tedy zobrazení) se nazývá funkce inverzní k funkci f na M, značí se obvykle f^{-1}.

<u>A tedy</u>: $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{}$ $x \in M,\ y \in f(M)$



$x_2 = f^{-1}(y_2) \iff f(x_2) = y_2$

$f(x_1) = y_1 \iff x_1 = f^{-1}(y_1)$

Protože je „zvykem" kreslit graf funkce tak, že nezávisle proměnná funkce „je" na ose x, tak jsme byli zvyklí (na střední škole) „vyměnit" $\underline{y}$ za $\underline{x}$ v předpisu f^{-1}, tj. graficky – „vyměnili" jsme osy $\underline{x}$ a y, což lze „snadno" udělat pomocí osové souměrnosti dle osy $y = x$; pak jsme tedy říkali, že graf funkce inverzní k f je souměrný s grafem funkce f dle přímky $y = x$:

Příklad: („taháky")

$f(x) = x^2$ je na intervalu $\langle 0, +\infty)$ rostoucí, tedy prostá:

(neboť: je-li $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in \langle 0, +\infty)$, je buď $x_1 < x_2$, nebo $x_1 > x_2$, pak $x_1^2 < x_2^2$, nebo $x_1^2 > x_2^2$, tedy ještě $x_1^2 \neq x_2^2$, což jsme měli ukázat) – je i „vidět" (to u nás „stačí");

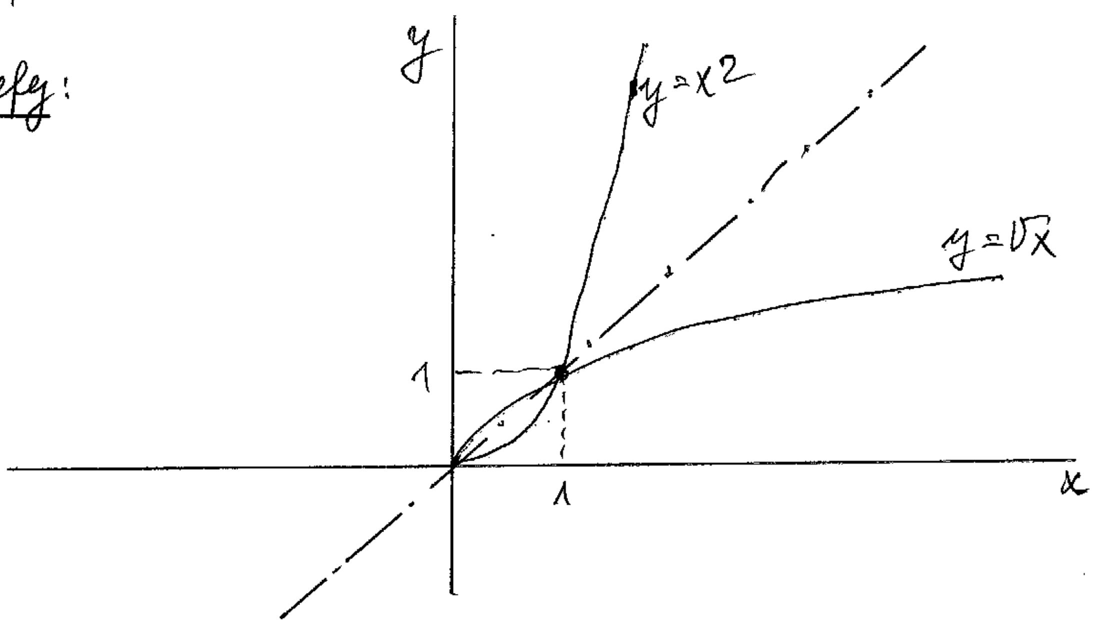
tedy, na intervalu $\langle 0, +\infty)$ existuje k funkci f funkce inverzní – $\sqrt{\cdot}$ (druhá odmocnina), $y \in \langle 0, +\infty)$

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$$

, tj. $\sqrt{\ }$ je definována pro $y \geq 0$, a nabývá nezáporných hodnot;

„výměna" $x \leftrightarrow y$: funkci pak píšeme $y = \sqrt{x}$:

grafy:



b) Ukažte, že funkce $f(x) = x^2$ je rostoucí na intervalu $\langle 0, +\infty)$ – – i když je to „zřejmé" v minulém příkladu: zvolme

$0 < x_1 < x_2$ – vynásobíme tuto nerovnost 1) $x_1 > 0$: $x_1^2 < x_1 x_2$

2) $x_2 > 0$: $x_1 x_2 < x_2^2$

a z těchto dvou nerovností máme: $\underset{(1)}{x_1^2 < x_1 x_2} \underset{(2)}{<} x_2^2$ ∇

a $f(x)=x^2$ je klesající na intervalu $(-\infty,0\rangle$:

analogicky: když $x_1,x_2\in(-\infty,0\rangle$, pak když

(1) $x_1<x_2<0 \quad |\cdot x_1(<0) \Rightarrow x_1^2>x_2x_1$

(2) $x_1<x_2<0 \quad |\cdot x_2(<0) \Rightarrow x_1x_2>x_2^2$

$\Big\} \Rightarrow$ (užíváme vlastnosti $a>b$)

$$\Rightarrow \underbrace{x_1^2 > x_2x_1}_{(1)} \underbrace{> x_2^2}_{(2)}$$ – a to jsme měli ukázat!

c) Maximální intervaly, kde jsou ryze monotonní (tj. rostoucí, nebo klesající) funkce (stačí „z nákresu", nemáte i dokázat):

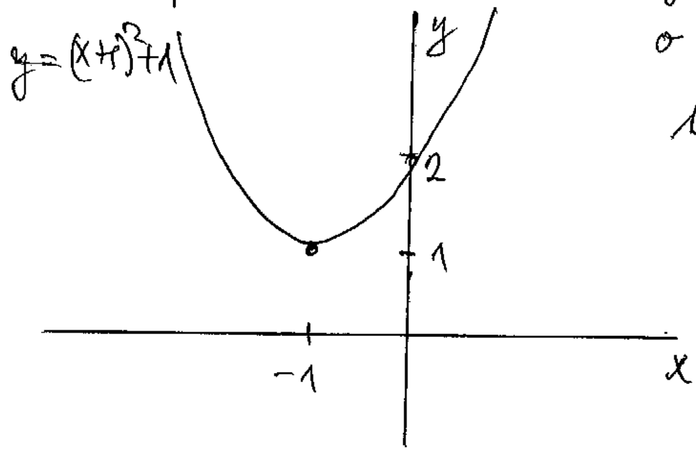
(i) $f(x)=x^2+2x+2$ – přepíšeme f pomocí doplnění na čtverec:

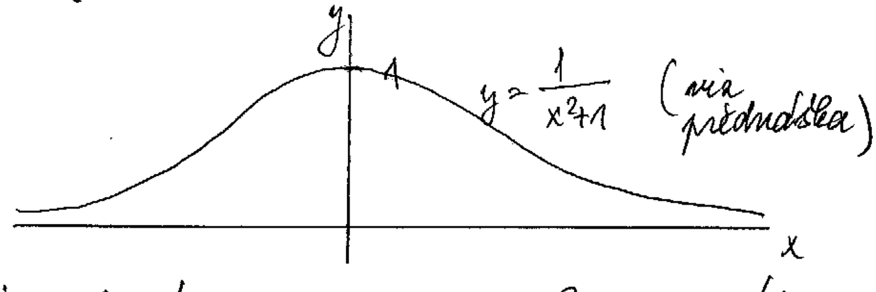
$f(x)=(x+1)^2+1$ – graf vznikne „posunutím" grafu $y=x^2$ o „1" doleva a o „1" „nahoru",

tedy f je rostoucí v $\langle -1,+\infty)$

a f je klesající v $(-\infty,-1\rangle$

($f(x)\geq 1$, vrchol paraboly je $V[-1,1]$; $f(0)=2$)





(ii) $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$:

funkce $f(x)=x^2+1$ je rostoucí v $\langle 0,+\infty)$ ($y=x^2$ posunutá o „1" nahoru)

$\Rightarrow \dfrac{1}{x^2+1}=g(x)$ je klesající v $\langle 0,+\infty)$

a $f(x)>0$ v R)

a $f(x)=x^2+1$ je klesající v $(-\infty,0\rangle \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2}=g(x)$ je rostoucí v $(-\infty,0\rangle$ (také je toto „vidět" z toho, že $g(x)$ je sudá funkce)

(iii) $\underline{h(x) = e^{-x^2}}$ – $D_h = R$, $h(x)>0$, sudá ; $h(0)=1$;

$h(x) = f(g(x))$ – funkce složená, kde:

$\underline{g(x) = -x^2}$ (vnitřní funkce) a $\underline{f(y) = e^y}$ (vnější funkce)

a nyní: $0 \le x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \;|\cdot(-1) \Rightarrow -x_1^2 > -x_2^2 \Rightarrow$

fce x^2 je rostoucí na $\langle 0,+\infty)$ (tj. $g(x)=-x^2$ je na $\langle 0,+\infty)$ klesající)

$\Rightarrow e^{-x_1^2} > e^{-x_2^2}$, neboť funkce $f(y)=e^y$ je rostoucí v R)

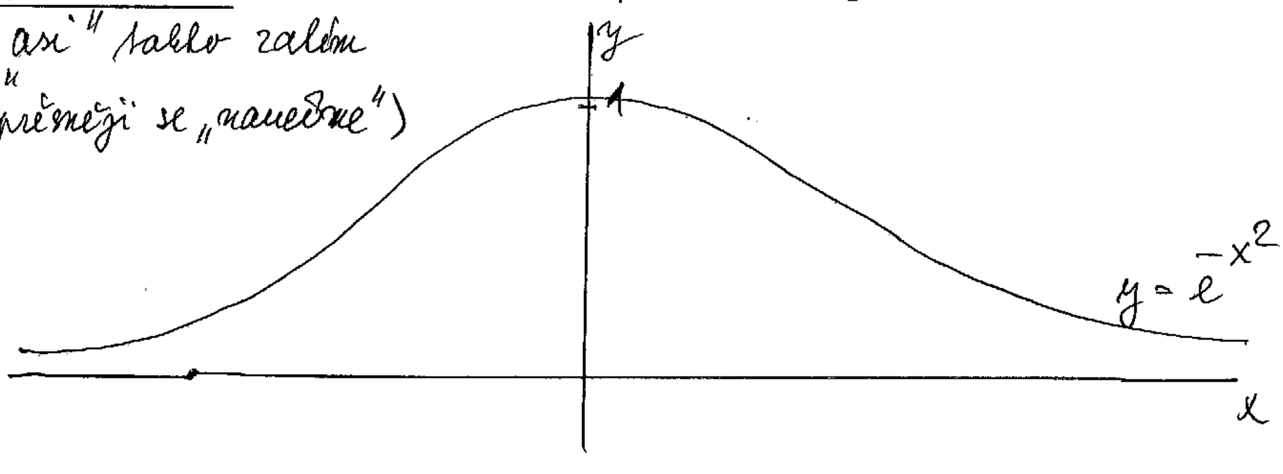
tedy – závěr: funkce $h(x)=e^{-x^2}$ je klesající na $\langle 0,+\infty)$
(ze sudosti plyne, že $h(x)$ roste na $(-\infty,0\rangle$ – můžete si i dokázat)

a ke grafu nám „pomůže" limita pro $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0 \quad (\text{„z taháku"})$$

Graf funkce $h(x)=e^{-x^2}$ asi už dobře znáte –
– Gaussova křivka (resp. spíše odtud jsou grafy funkcí $c\,e^{-bx^2}$)

odhadneme
asi „takto zhruba"
(přesněji se „nenaučíme")



4. Inversní funkce.

a) máme ukázat (a hlavně vědět), že když je funkce f rostoucí (resp. klesající) na (a,b), pak je f v intervalu (a,b) prostá, tj.
pro každé $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$:

zvolme tedy (libovolně) $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$; pak je buď $x_1 < x_2$, nebo $x_1 > x_2$, a je-li f rostoucí v (a,b), pak $f(x_1) < f(x_2)$, nebo $f(x_1) > f(x_2)$, tedy $f(x_1) \neq f(x_2)$ – což jsme měli ukázat (pro f klesající v (a,b) jistě vidíte, že to, že f je pak v (a,b) prostá, se ukáže zcela podobně, ukažte sami!).

b) Máme najít inversní funkci k funkci

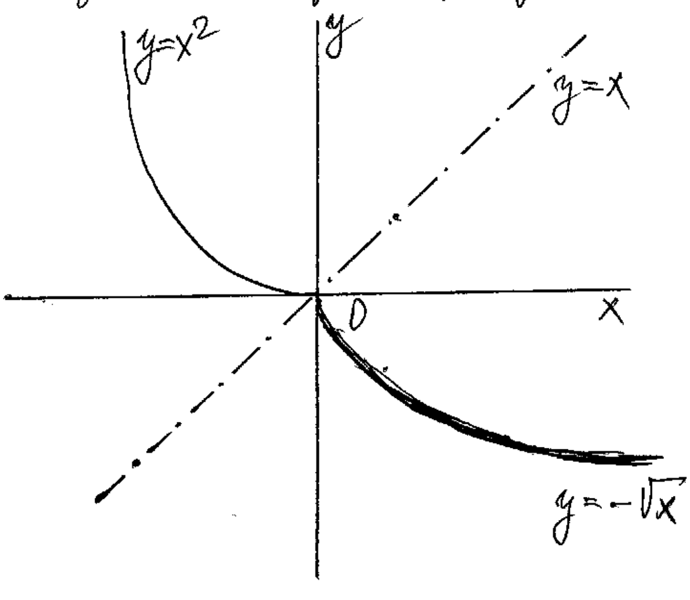
(i) $f(x) = x^2$ na intervalu $(-\infty, 0]$:

$f(x) = x^2$ je na $(-\infty, 0\rangle$ klesající, tedy (dle a)) prostá, zobrazuje interval $(-\infty, 0\rangle$ na interval $\langle 0, +\infty)$, tedy zde funkce f „má" funkci inversní, tj.:

je-li $x^2 = y$, existuje jediné $x \in (-\infty, 0\rangle$ tak, že $x^2 = y$, a to $x = -\sqrt{y}$ (zde „$\sqrt{*}$" je inversní fce k fci $y = x^2$ na $\langle 0, +\infty)$);

a „výměna" $x \leftrightarrow y$:

$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, $x \in \langle 0, +\infty)$



(ii) $f(x) = x^2 + 2x + 2$, a máme najít inverzní funkci k f na maximálních možných intervalech:

„pro inverzní funkci" hledáme pro dané $y \in (?)$ hodnotu x tak, aby $f(x) = y$ (tj. $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$),
tj. zde hledáme ke zvolenému $y \in (?)$ x tak, aby
$x^2 + 2x + 2 = y$ (a x – jediné řešení), tedy, řešíme rovnici (kvadratickou s parametrem)

$$x^2 + 2x + (2-y) = 0 \quad \text{-- upravíme na}$$

$$(x+1)^2 + 1 - y = 0, \text{ tj. } \underline{(x+1)^2 = y - 1} \quad (*)$$

a vidíme: 1) řešení rovnice (*) bude existovat pro $y \geq 1$
($\text{tj. } \mathcal{H}f = \langle 1, +\infty)$)

a pak (odmocníme) ($\sqrt{a^2} = |a|$) 2) $|x+1| = \sqrt{y-1}$, tedy, je-li

(i) $x \geq -1$ $(x+1 \geq 0)$, je
$x+1 = \sqrt{y-1}$, tedy $x = -1 + \sqrt{y-1}$;

(ii) $x \leq -1$ ($x+1 \leq 0$ a $|x+1| = -(x+1)$),
tedy $x+1 = -\sqrt{y-1}$, a $x = -1 - \sqrt{y-1}$;

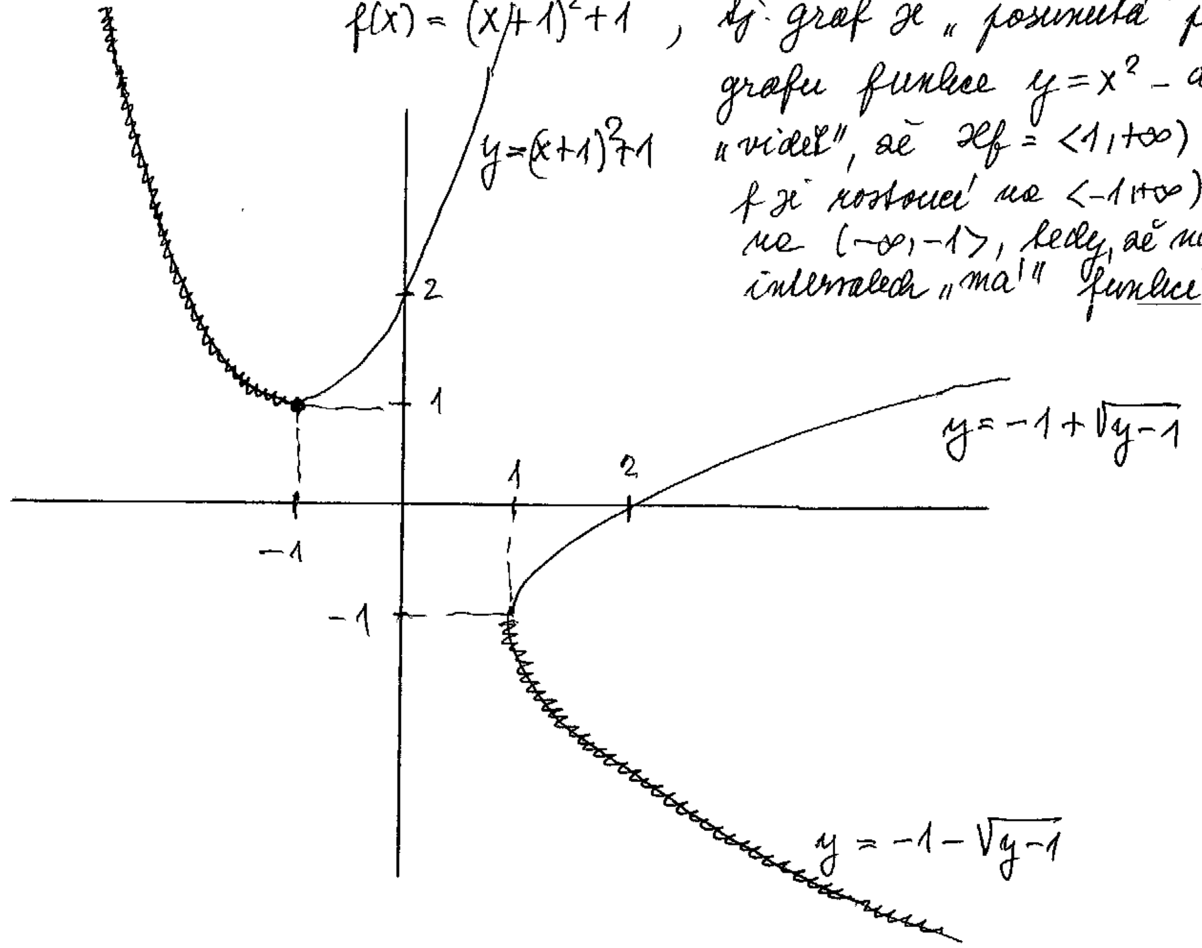
V „obvyklém" značení: $(x \leftrightarrow y)$
„inverzní funkce k funkci $f(x) = x^2 + 2x + 2$ existují na intervalech

$\langle -1, +\infty)$, zde $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-1}$, $x \in \langle 1, +\infty)$;
a $(-\infty, -1\rangle$, zde $f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x-1}$, $x \in \langle 1, +\infty)$.

Poznámka: zde jsem záměrně nevyužívala graf funkce $f(x)$, odkud je vše „snadno" vidět, abychom si nacvičili hledání inverzní funkce, i když nic „nevidíme".

S grafem: $f(x) = x^2+2x+2$ lze vyjádřit ve tvaru

$f(x) = (x+1)^2+1$, tj. graf je „posunutá" parabola grafu funkce $y = x^2$ – a hned je „vidět", že $\mathcal{H}f = \langle 1,+\infty)$, a že f je rostoucí na $\langle -1,+\infty)$ a klesající na $(-\infty,-1\rangle$, tedy, že na těchto intervalech „má" funkci inverzní;

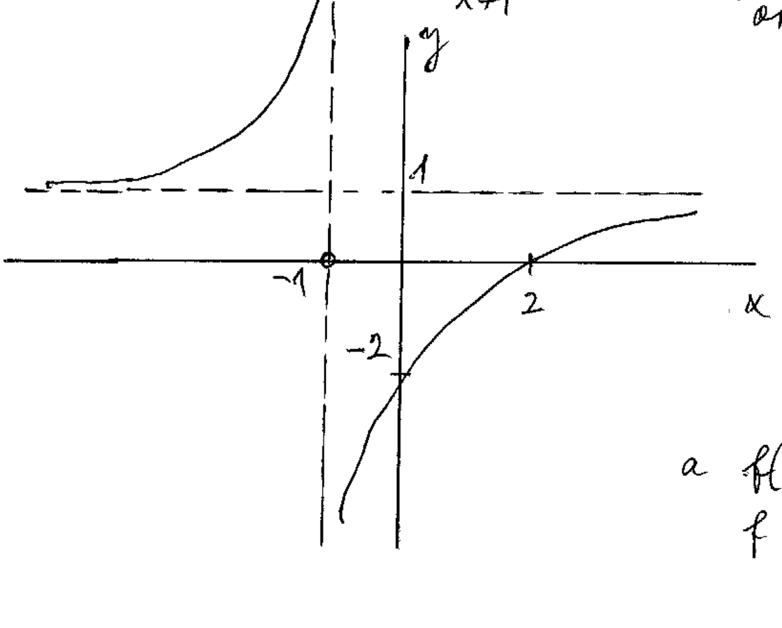


Takto, pomocí grafu, se převod řeší asi snáze, tedy „to jde".

(iii) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ – zkusme nejprve z grafu: $\mathcal{D}f = (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

a $f(x) = 1 - \dfrac{3}{x+1}$, tj. graf „získáme" posunutím a otočením z grafu $y = \dfrac{1}{x}$:

$f(0) = -2$, $f(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

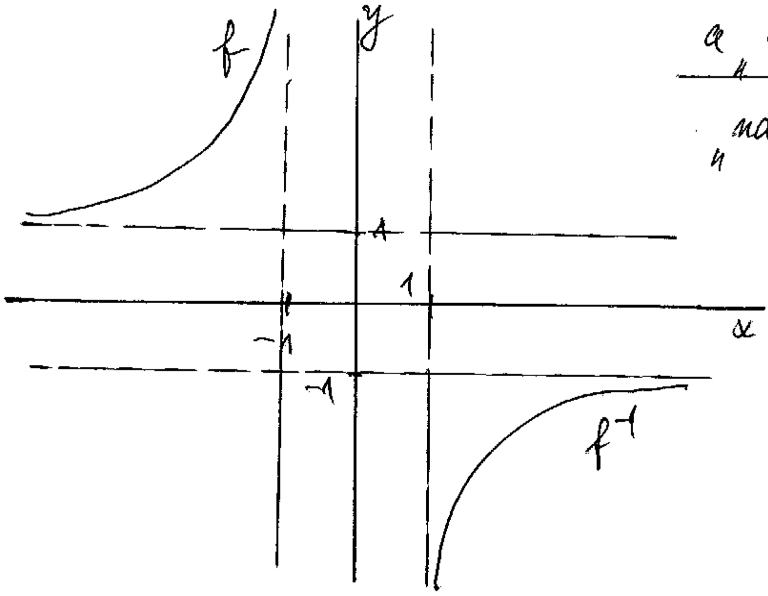


„vidíme", že f je rostoucí, tedy prostá, v intervalech $(-\infty,-1)$ i $(-1,+\infty)$, tedy zde má funkci inverzní;

a $f((-\infty,-1)) = (1,+\infty)$ a

$f(-1,+\infty) = (-\infty,1)$

(i) <u>inverzní funkce k f v intervalu $(-\infty,-1)$:</u>



<u>a „výpočet“:</u>

„návod“: $f(x)=y \iff x=f^{-1}(y)$:

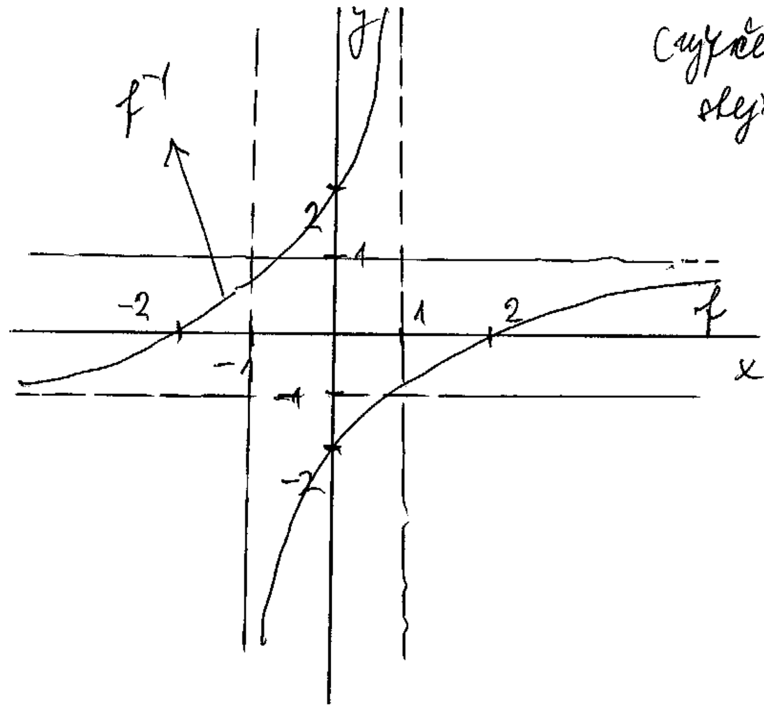
řešíme tedy rovnici
(pro $x\in(-\infty,-1)$ je $f(x)\in(1,+\infty)$)

$$\frac{x-2}{x+1}=y\ ,\quad \text{a odtud}$$
$$x-2=y(x+1)$$
$$x(y-1)=y+2$$
$$x=\frac{y+2}{y-1}\quad \text{pro } y\neq 1\,!$$

(tedy i z výpočtu f^{-1} je „vidět“ Hf!)

a $x\leftrightarrow y$:
v $(-\infty,-1)$ je k f inverzní funkce
$$f^{-1}(x)=\frac{x+2}{x-1}\ ,\ x\in(1,+\infty)$$

(ii) <u>a v intervalu $(-1,+\infty)$</u>: pro $(f(x)=)\,y\in(-\infty,1)$ a opět (výpočet zůstává i v tomto intervalu stejný)



$$x=\frac{y+2}{y-1}\ ,\ \text{tj. } (x\leftrightarrow y)$$
$$f^{-1}(x)=\frac{x+2}{x-1}\ ,$$
! ale $x\in(-\infty,-1)$

IV. a něco k výrokovému a množinovému počtu:

1. Vysvětlete a negujte:

a) $\forall x \in (a,b) : |f(x)| \leqq 1$

„česky": pro každé $x \in (a,b)$ je $-1 \leq f(x) \leq 1$, tj. f je v intervalu (a,b) omezená zdola (-1) a i shora (1) –
– tj. graf je v „pásce" $-1 \leq y \leq 1$.

negace: „česky" – existuje $\bar{x} \in (a,b)$ tak, že poruší „$|f(x)| \leqq 1$",
tj. existuje $\bar{x} \in (a,b)$ tak, že „$|f(\bar{x})| > 1$", – zápis:
$\exists \bar{x} \in (a,b) : |f(x)| > 1$.

b) $\exists c > 0 \ \forall x \in (a,b) : |f(x)| \leqq c$

„totéž", jako v a), jen místo „1" je zde jiné „omezení" c –
– tj. výrok říká, že funkce f je omezená zdola číslem $(-c)$ a shora číslem c, v intervalu (a,b).

negace snadná (doufám) z a)

c) $\forall c > 0 \ \forall x \in (a,b) : |f(x)| \leqq c$:

pokud nezáporné číslo α je menší nebo rovno libovolnému kladnému číslu c, pak je (asi zřejmé) $\alpha = 0$ (kdyby $\alpha > 0$, pak třeba $\frac{\alpha}{2} < \alpha$, což by bylo ve sporu s naším tvrzením. Tedy zde – $f(x) = 0$ pro všechna $x \in (a,b)$.

negace: existuje takový bod $x_0 \in (a,b)$ a takové číslo $c_0 > 0$, že $|f(x_0)| > c_0$ – .

– ale jednodušeji „česky" – aspoň v jednom bodě $x_0 \in (a,b)$ je f nenulová, tj. $|f(x_0)| > 0$.

Zápis pomocí kvantifikátorů: $\exists c_0 > 0 \ \exists x_0 \in (a,b) : |f(x)| > c_0$.

2, Rozhodněte o pravdivosti výroku :

$$\forall x \in R \ : \ \cos x = \sqrt{1-(\sin x)^2}$$

Výrok neplatí ! „správně“ je ($\sqrt{a^2} = |a|$) :

$$\sqrt{1-(\sin x)^2} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$$

nebo stačí i „protipříklad“ :

$x = \pi$, $\sin \pi = 0$ $\quad \sqrt{1-(\sin \pi)^2} = \sqrt{1} = 1$,
ale $\cos \pi = -1$!) – spor !

3, $A = \{a \in R ; \ |a-1| < 2\} = (-1, 3)$

$B = \{b \in R ; \ |b+2| \geqq 2\} = (-\infty, -4\rangle \cup \langle 0, +\infty)$

Řeš.: $A \cup B = (-\infty, -4\rangle \cup (-1, +\infty)$

$A \cap B = \langle 0, 3)$

$A \setminus B = (-1, 0)$, $\quad B \setminus A = (-\infty, -4\rangle \cup \langle 3, +\infty)$

$A \times B = (-1, 3) \times [(-\infty, -4\rangle \cup \langle 0, +\infty)]$